ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.12 1981

Ю.И.Ш е в ч е н к о

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА НЕКОТОРЫХ ИНДУЦИРОВАННЫХ СВЯЗНОСТЕЙ ПОВЕРХНОСТИ

Понятие ковариантного дифференциала геометрического объекта относительно связности расслоения линейных реперов [1,с.124] очевидным образом распространяется на случай произвольного главного расслоения. С его помощью геометрически охарактеризованы некоторые связности, индуцированные на поверхности проективного пространства нормализацией А.П.Нордена.

Проективное n-пространство P_n отнесем к подвижному реперу $\{A, A_J\}$, инфинитезимальные перемещения которого определяются формулами

$$dA = \theta A + \omega^J A_J \qquad (I, J, K = \overline{1,n}),$$

$$dA_J = \theta A_J + \omega^K_J A_K + \omega_J A,$$

причем инвариантные формы проективной группы $\omega^J, \omega^K_J, \omega_J$ удовлетворяют структурным уравнениям

$$D\omega^J = \omega^K \wedge \omega^J_K, \quad D\omega_J = \omega^K_J \wedge \omega_K,$$

$$D\omega^K_J = \omega^L_J \wedge \omega^K_L + (\delta^K_J \omega_L + \delta^K_L \omega_J) \wedge \omega^L.$$

В пространстве P_n рассмотрим m-поверхность X_m и произведем специализацию подвижного репера

$$\{A, A_i, A_a\} \quad (i, j, k = \overline{1,m};\ a, b = \overline{m+1,n})$$

следующим образом: вершину A совместим с текущей точкой поверхности X_m, а вершины A_i поместим на соответствующую касательную плоскость. В таком репере формы $\omega^i, \omega^a, \omega^a_i$ являются главными, а остальные формы $\omega^i_j, \omega_i, \omega^a_b, \omega^i_a, \omega_a$ – вторичными. С поверхностью X_m ассоциируется [2] главное расслоение с базисными формами ω^i слоевыми формами которого служат вторичные формы. Фундаментально-групповая связность в ассоциированном расслоении задается [3] с помощью форм связности

$$\tilde\omega^i_j = \omega^i_j - \Gamma^i_{jk}\omega^k, \quad \tilde\omega_i = \omega_i - \Gamma_{ij}\omega^j,$$

$$\tilde\omega^a_b = \omega^a_b - \Gamma^a_{bi}\omega^i, \quad \tilde\omega^i_a = \omega^i_a - \Gamma^i_{aj}\omega^j, \qquad (1)$$

$$\tilde\omega_a = \omega_a - \Gamma_{ai}\omega^i,$$

где компоненты объекта связности $\Gamma = (\Gamma^i_{jk}, \Gamma_{ij}, \Gamma^a_{bi}, \Gamma^i_{aj}, \Gamma_{ai})$ удовлетворяют соответствующим уравнениям [2].

Произведем нормализацию А.П.Нордена [4] поверхности X_m. Нормаль 1-го рода P_{n-m} задается квазитензором λ^i_a:

$$d\lambda^i_a - \lambda^i_b\omega^b_a + \lambda^j_a\omega^i_j + \omega^i_a = \lambda^i_{aj}\omega^j. \qquad (2)$$

Нормаль 2-го рода P_{m-1} определяется совокупностью точек

$$B_i = A_i + \lambda_i A, \qquad (3)$$

причем

$$d\lambda_i - \lambda_j\omega^j_i + \omega_i = \lambda_{ij}\omega^j. \qquad (4)$$

Н.М.Остиану показала, что поле нормалей 1-го рода P_{n-m} индуцирует оснащение Картана [6] поверхности X_m плоскостями P_{n-m-1}, каждая из которых определена точками

$$B_a = A_a + \lambda^i_a A_i + \lambda_a A, \qquad (5)$$

где функции λ_a удовлетворяют уравнениям

$$d\lambda_a - \lambda_b\omega^b_a + \lambda^i_a\omega_i + \omega_a = \lambda_{ai}\omega^i \qquad (6)$$

и охватываются по некоторым формулам [2],[5,с.257]. Оказывается, что нормализация А.П.Нордена индуцирует также связность в ассоциированном расслоении, что доказывается [2] охватом объекта связности Γ с помощью нормализующего квазитензора (λ^i_a, λ_i).

Введем формы связности (I) в уравнения (2),(4),(6):

$$\Delta\lambda^i_a = \tilde\lambda^i_{aj}\omega^j, \quad \Delta\lambda_i = \tilde\lambda_{ij}\omega^j, \quad \Delta\lambda_a = \tilde\lambda_{ai}\omega^i,$$

где ковариантные дифференциалы функций $\lambda^i_a, \lambda_i, \lambda_a$ имеют вид:

$$\Delta\lambda^i_a = d\lambda^i_a - \lambda^i_b\tilde\omega^b_a + \lambda^j_a\tilde\omega^i_j + \tilde\omega^i_a,$$

$$\Delta\lambda_i = d\lambda_i - \lambda_j\tilde\omega^j_i + \tilde\omega_i,$$

$$\Delta\lambda_a = d\lambda_a - \lambda_b\tilde\omega^b_a + \lambda^i_a\tilde\omega_i + \tilde\omega_a,$$

а их ковариантные производные выражаются по формулам:

$$\tilde\lambda^i_{aj} = \lambda^i_{aj} + \lambda^i_b\Gamma^b_{aj} - \lambda^k_a\Gamma^i_{kj} - \Gamma^i_{aj},$$

$$\tilde\lambda_{ij} = \lambda_{ij} + \lambda_k\Gamma^k_{ij} - \Gamma_{ij}$$

$$\tilde\lambda_{ai} = \lambda_{ai} + \lambda_b\Gamma^b_{ai} - \lambda^j_a\Gamma_{ji} - \Gamma_{ai}.$$

Дифференцируя равенства (3),(5), получим

$$dB_i = (\dots)^j_i B_j + \omega^a_i B_a + \Delta\lambda_i A,$$

$$dB_a = (\dots)^b_a B_b + \Delta\lambda^i_a A_i + \Delta\lambda_a A$$

Из вышеизложенного вытекают следующие результаты:

I/смещение нормали 2-города P_{m-1} в гиперплоскости $P_{n-1} = P_{m-1} + P_{n-m-1}$ можно рассматривать в качестве ее параллельного переноса в коаффинной связности $(\Gamma^i_{jk}, \Gamma_{ij})$;

2/смещение плоскости Картана-Остиану P_{n-m-1} внутри нормали I-го рода P_{n-m} есть ее параллельный перенос в связности $(\Gamma^i_{jk}, \Gamma^a_{bi}, \Gamma^i_{aj})$;

3/плоскость P_{n-m-1} переносится параллельно в связности Γ тогда и только тогда, когда она остается стационарной.

Из анализа уравнений рассматриваемых параллельных переносов следует, что на поверхности X_m существует $(m-r_\alpha)$-мерное направление ($\alpha = 1,2,3$), вдоль которого допускается параллельный перенос α/. Здесь

$$r_1 = rang(\tilde\lambda_{ij}); \quad r_2 = rang(\tilde\lambda^i_{aj}),$$

где, например, столбцы занумерованы индексом j, а строки- парой индексов i, a; $r_3 = rang(\tilde\lambda^i_{aj}, \tilde\lambda_{ai})$, причем имеется ввиду $(n-m)(m+1)\times m$ -матрица, полученная "добавлением" к предыдущей $m(n-m)\times m$ -матрице $(\tilde\lambda^i_{aj})$ матрицы $(\tilde\lambda_{ai})$ размера $(n-m)\times m$.

Обычный параллельный перенос касательной прямой [4,с.202],[7] является суперпозицией параллельных переносов I/ и 2/. Действительно, касательная прямая задается точкой B на нормали 2-города P_{m-1}. Смещаем эту точку в соответствии с переносом I/ в ($n-m$)-мерной плоскости, натянутой на точку B и плоскость P_{n-m-1}. Затем плоскость P_{n-m-1} перемещаем согласно переносу 2/ внутри нормали I-го рода P_{n-m}. Таким образом, при одновременном рассмотрении переносов 1/ и 2/ точка B будет смещаться в ($n-m+1$)-плоскости $P_{n-m} + B$.

Интересно сравнить параллельные переносы 2/ и 3/ плоскости P_{n-m-1}. Если связность $(\Gamma^i_{jk}, \Gamma^a_{bi}, \Gamma^i_{aj}) \subset \Gamma$ еще оставляет возможность для параллельных переносов плоскости P_{n-m-1}, то более широкая связность Γ сковывает смещения этой плоскости настолько, что понятие параллельного переноса вырождается и плоскость P_{n-m-1} в связности Γ фактически переносить нельзя. Здесь ярко проявляется геометрическая характеристика связности, которая действительно связывает смещения плоскоети P_{n-m-1}.

Список литературы

1. Е в т у ш и к Л.Е., Л у м и с т е Ю.Г., О с т и а н у Н.М., Широков А.П. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях.-В кн.: Проблемы геометрии,

т.9,М.,1979,с.5-246.

2.Ш е в ч е н к о Ю.И. Об оснащениях многомерной поверхности проективного пространства.-В кн.:Дифференциальная геометрия многообразий фигур .Вып.8,Калининград,1977,с.135-150.

3.Л а п т е в Г.Ф. Многообразия,погруженные в обобщенные пространства.-В кн.:Труды 4-го Всес.матем. съезда,т.2,Л.,1964,с.226-233.

4.Н о р д е н А.П. Пространства аффинной связности. М.,"Наука",1976.

5.О с т и а н у Н.М. О геометрии многомерной поверхности проективного пространства.- В кн.:Труды геом. семинара.Т.I,М.,1966,с.239-263.

6.Cartan E. Les espaces a connexion projective.- В кн.:Труды семин.по векторн. и тензорн. анализу.Вып.4, М.-Л.,1937,с.147-159.

7.Ш е в ч е н к о Ю.И. Параллельные перенесения на поверхности.-В кн.:Дифференц.геометрия многообразий фигур.Вып.10,Калининград,1979,с.154-158.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР

Вып. 12 1981

А. М. Ш е л е х о в, Е. И. Б у р ч,

Л. Е. Е в д о к и м о в а, М. Е. С н е т к о в а

ОБОБЩЕНИЕ ОДНОЙ ТЕОРЕМЫ БЕЛЬТРАМИ

Известно следующее предложение, принадлежащее Е.Бельтрами. Пусть V - развертывающаяся поверхность, образованная касательными гладкой пространственной кривой ℓ, π_o - соприкасающаяся плоскость этой кривой в некоторой точке $M_o \in \ell$ и ℓ' - линия пересечения плоскости π_o с поверхностью V. Тогда имеет место равенство $k' = \frac{3}{4}k$, где k и k', соответственно, кривизны линий ℓ и ℓ' в их общей точке M_o. Мы обобщаем это соотношение для случая, когда ℓ - кривая в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ размерности n и $\ell' \equiv \ell^m$ - кривая, высекаемая соприкасающимися $(n-m)$- плоскостями кривой ℓ в некоторой ее фиксированной соприкасающейся m-плоскости. Результат сформулируем в виде следующей теоремы.

Т е о р е м а. p- е кривизны K_p и K_p^m кривых ℓ и ℓ^m в их общей точке связаны соотношением

$$K_p^m = \frac{n}{n-p}\cdot\frac{m-p}{m}K_p. \qquad (1)$$

Формула Бельтрами получается отсюда при $n=3$, $m=2$, $p=1$.

I. Предварительно выведем формулы для вычисления кривизн гладкой параметризованной кривой в $\mathbb{R}^n$, которые нам понадобятся при доказательстве теоремы.

Формулы Френе для кривой ℓ, заданной уравнением $\overline{r} = \overline{r}(s)$, где s - натуральный параметр, имеют следующий вид (см. [1]):